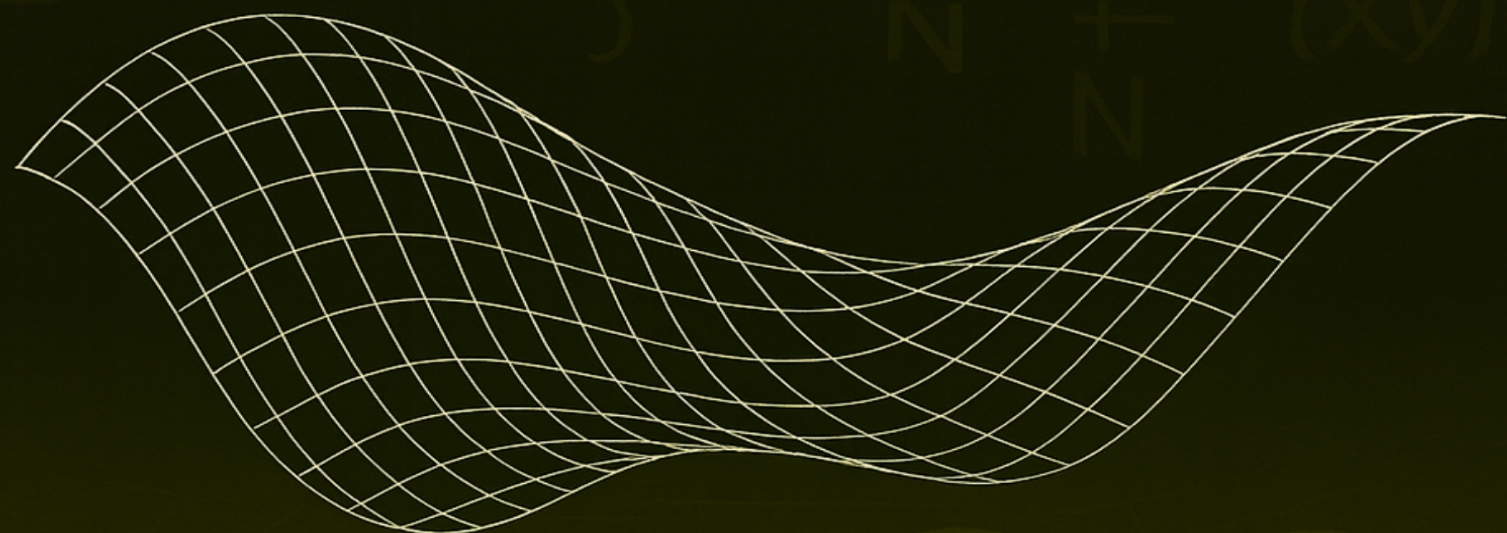


ANÁLISIS MATEMÁTICO II



Σ
TEORÍA
+ PRACTICA

✓
EJEMPLOS
RESUELTOS

Cálculo Multivariable y sus
Aplicaciones en Espacios Vectoriales

**HELBERT JUSTO LUQUE
ZEVALLOS**

Título original:
ANÁLISIS MATEMÁTICO II
Cálculo Multivariable y sus Aplicaciones en Espacios Vectoriales

Autor:
Luque Zevallos Helbert Justo

Editor independiente:
Luque Zevallos Helbert Justo
Coop. Vista Alegre E-2, Alto Selva Alegre,
Arequipa, Perú

Publicado a través de amazon.com
Disponible en <https://www.amazon.com/dp/B0DQVNNBK6>

**Prohibida la reproducción total o parcial de
esta obra**

DERECHOS RESERVADOS
N° DEP. LEGAL 2025-02324

Primera Edición Virtual
Diciembre 2024
Idioma : Español

Serie: Licenciatura de Matemática

Índice general

1	Presentación	3
2	Sumario	9
3	Introducción	11

I	Fundamentos del Espacio Vectorial y Cálculo de Funciones de Varias Variables	
1	Introducción al Espacio Vectorial \mathbb{R}^n	15
1.1	El Espacio \mathbb{R}^n	15
1.1.1	Definición del Espacio Vectorial \mathbb{R}^n	15
1.1.2	Propiedades de los Vectores en \mathbb{R}^n	22
1.2	Producto Punto, Proyecciones	29
1.2.1	Definición y Propiedades del Producto Punto	29
1.2.2	Proyecciones Ortogonales de Vectores	35
1.3	Norma, Distancia	40
1.3.1	Definición de Norma y Tipos (Euclídea, Infinito)	40
1.3.2	Cálculo de Distancia entre Puntos en \mathbb{R}^n	46
1.4	Producto Cruz en \mathbb{R}^3	52
1.4.1	Definición y Propiedades del Producto Cruz	52
1.4.2	Aplicaciones Geométricas del Producto Cruz	59
1.5	Rectas y Planos	61
1.5.1	Ecuaciones Paramétricas y Simétricas de Rectas	61
1.5.2	Ecuación General de un Plano en \mathbb{R}^3	66

2	Funciones de Varias Variables	091
2.1	Funciones de Varias Variables	091
2.1.1	Definición y Ejemplos de Funciones con Varias Entradas	091
2.1.2	Representación Gráfica de Funciones	097
2.2	Geometría de las Funciones de Varias Variables	103
2.2.1	Superficies y Contornos	103
2.2.2	Representaciones Tridimensionales	110
2.3	Límites y Continuidad	117
2.3.1	Definición de Límite para Funciones de Varias Variables	117
2.3.2	Criterios de Continuidad	123
2.4	Vector Normal, Plano Tangente	127
2.4.1	Definición de Vector Normal y Plano Tangente	127
2.4.2	Cálculo del Plano Tangente en Puntos Específicos	132
2.5	Derivadas Parciales de Orden Superior	137
2.5.1	Definición y Notación de Derivadas Parciales	137
2.5.2	Aplicación de las Derivadas Parciales en el Análisis de Funciones	143
3	Composición de Funciones de varias variables	167
3.1	Composición de Funciones de Varias Variables	167
3.1.1	Definición y Ejemplos de Composición	167
3.1.2	Propiedades de la Composición de Funciones de Varias Variables	176
3.2	Regla de la Cadena: Perspectiva General	183
3.2.1	Derivación de Funciones Compuestas	183
3.2.2	Aplicaciones Prácticas de la Regla de la Cadena	190
3.3	Funciones Implícitas (Varias Variables)	196
3.3.1	Definición de Funciones Implícitas	196
3.3.2	Aplicaciones de la Regla de la Derivada Implícita	201
3.4	Función Inversa	208
3.4.1	Definición y Condiciones para la Existencia de la Función Inversa	208
3.4.2	Aplicación del Teorema de la Función Inversa	214

II

Extremos de Funciones e Integrales Múltiples

4	Extremos de Funciones de Varias Variables	245
4.1	Definición	245
4.1.1	Máximos y Mínimos Locales	245
4.1.2	Puntos Críticos	249
4.2	Condiciones Suficientes para la Existencia de Extremos Locales	255
4.2.1	Teorema de la Segunda Derivada	255
4.2.2	Matriz Hessiana y sus Propiedades	261
4.3	Caso de Dos Variables	268
4.3.1	Identificación de Puntos Críticos	268
4.3.2	Clasificación de Puntos Críticos	275

4.4	Extremos Condicionados: Método de Multiplicadores de Lagrange	281
4.4.1	Definición y Aplicaciones del Método	281
4.4.2	Ejemplos Prácticos de Lagrange con Restricciones Sencillas	288
4.5	Extremos Absolutos sobre Regiones Compactas	294
4.5.1	Búsqueda de Extremos en Regiones Cerradas	294
4.5.2	Análisis de Casos en Regiones Acotadas	298
5	Integrales Múltiples	319
5.1	Integral Doble: Integralidad, Tipos de Regiones Generales	319
5.1.1	Definición de la Integral Doble	319
5.1.2	Tipos de Regiones de Integración	321
5.2	Cambio de Variables en Integrales Dobles: Coordenadas Polares	325
5.2.1	Definición de Coordenadas Polares	325
5.2.2	Cambio de Variable para Simplificar Integrales	330
5.3	Aplicaciones de la Integral Doble	334
5.3.1	Cálculo de Volúmenes de Regiones Tridimensionales	334
5.3.2	Determinación de Áreas de Figuras Planas	340
5.3.3	Centros de Masa y Cálculo de Momentos	345
5.4	Integrales Triples: Posibles Órdenes de Integración	350
5.4.1	Definición y Ejemplos de Integrales Triples	350
5.4.2	Orden de Integración en Coordenadas Rectangulares	356
5.5	Cambio de Variables en Integrales Triples	362
5.5.1	Coordenadas Cilíndricas: Definición y Propiedades	362
5.5.2	Coordenadas Esféricas: Aplicaciones y Cambio de Variable	369
5.6	Aplicaciones de las Integrales Triples	375
5.6.1	Volúmenes de Cuerpos en el Espacio	375
5.6.2	Cálculo de Centros de Masa y Momentos para Cuerpos Volumétricos	383

III

Integrales de Línea y de Superficie

6	Integrales de Línea	427
6.1	Caminos en \mathbb{R}^n	427
6.1.1	Definición de un Camino y Parametrización	427
6.1.2	Ejemplos de Caminos en el Espacio Tridimensional	432
6.2	Campos Vectoriales	438
6.2.1	Definición de Campo Vectorial y Ejemplos	438
6.2.2	Representación Gráfica de Campos Vectoriales	440
6.3	Integrales de Línea: Definición y Propiedades	442
6.3.1	Evaluación de Integrales de Línea	442
6.3.2	Propiedades Fundamentales de Integrales de Línea	446
6.4	Independencia del Camino, Campos Conservativos y Funciones Potenciales	451
6.4.1	Definición de Independencia del Camino	451
6.4.2	Caracterización de Campos Conservativos	454
6.4.3	Funciones Potenciales y su Cálculo	458

6.5	Integrales de Línea con Respecto a la Longitud de Arco	461
6.5.1	Definición y Aplicaciones Físicas	461
6.5.2	Cálculo de la Longitud de Curvas	465
6.6	Teorema de Green	469
6.6.1	Enunciado del Teorema de Green	469
6.6.2	Aplicaciones del Teorema en Cálculo de Áreas	473
7	Integrales de Superficie	501
7.1	Superficie Parametrizada: Tipos Principales de Reparametrizaciones	501
7.1.1	Definición de Superficies Parametrizadas	501
7.1.2	Ejemplos de Reparametrización de Superficies Comunes	505
7.2	Áreas de Superficies Parametrizadas	508
7.2.1	Cálculo del Área de una Superficie Parametrizada	508
7.2.2	Aplicaciones en Geometría y Física	513
7.3	Integral de Superficie de Funciones Reales	518
7.3.1	Definición de Integrales de Superficie	518
7.3.2	Evaluación de Integrales para Funciones Escalares sobre Superficies	522
7.4	Integrales de Superficies de Campos Vectoriales	528
7.4.1	Evaluación de la Integral de Superficie de un Campo Vectorial	528
7.4.2	Relación con Flujo de Campos a Través de una Superficie	531
7.5	La Divergencia de un Campo Vectorial	534
7.5.1	Definición de Divergencia y sus Aplicaciones	534
7.5.2	Interpretación Física del Operador de Divergencia	535
7.6	El Rotacional de un Campo Vectorial	538
7.6.1	Definición y Propiedades del Rotacional	538
7.6.2	Aplicaciones Físicas del Rotacional	539
7.7	Teorema de Stokes	541
7.7.1	Enunciado del Teorema de Stokes	541

3. Introducción

El presente libro, **Análisis Matemático II**, está organizado en siete capítulos principales. Cada capítulo desarrolla conceptos fundamentales del análisis matemático, con énfasis en las funciones escalares y vectoriales en espacios multidimensionales. A continuación, se ofrece una descripción más detallada de cada capítulo, incluyendo sus respectivos subtemas.

Capítulo 1: Introducción al Espacio Vectorial

Este capítulo presenta los conceptos básicos del espacio vectorial en \mathbb{R}^n , fundamentales para el análisis geométrico en varias dimensiones. Los subtemas incluidos son:

- 1.1 **El Espacio \mathbb{R}^n** - Definición del espacio vectorial \mathbb{R}^n . - Propiedades de los vectores en \mathbb{R}^n .
- 1.2 **Producto Punto, Proyecciones** - Definición y propiedades del producto punto. - Proyecciones ortogonales de vectores.
- 1.3 **Norma, Distancia** - Definición de norma y tipos (Euclídea e infinita). - Cálculo de distancia entre puntos en \mathbb{R}^n .
- 1.4 **Producto Cruz en \mathbb{R}^3** - Definición y propiedades del producto cruz. - Aplicaciones geométricas y físicas del producto cruz.
- 1.5 **Rectas y Planos** - Ecuaciones paramétricas y simétricas de rectas. - Ecuación general de un plano en \mathbb{R}^3 .

Capítulo 2: Funciones de Varias Variables

Este capítulo aborda el estudio de funciones con varias entradas y salidas, centrándose en sus propiedades y gráficos. Los subtemas incluidos son:

- 2.1 **Funciones de Varias Variables** - Definición y ejemplos de funciones con varias entradas. - Representación gráfica de funciones.
- 2.2 **Geometría de las Funciones de Varias Variables** - Superficies y contornos. - Representaciones tridimensionales de funciones.
- 2.3 **Límites y Continuidad** - Definición de límite para funciones de varias variables. - Criterios de continuidad.
- 2.4 **Vector Normal, Plano Tangente** - Definición de vector normal y plano tangente. - Cálculo del plano tangente en puntos específicos.
- 2.5 **Derivadas Parciales de Orden Superior** - Definición y notación de derivadas parciales. -

Aplicación de las derivadas parciales en el análisis de funciones.

Capítulo 3: Composición de Funciones de Varias Variables

Este capítulo desarrolla la composición de funciones y su relación con las derivadas, aplicando herramientas como la regla de la cadena. Los subtemas son:

3.1 Composición de Funciones de Varias Variables - Definición y ejemplos de composición. - Propiedades de la composición de funciones.

3.2 Regla de la Cadena: Perspectiva General - Derivación de funciones compuestas. - Aplicaciones prácticas de la regla de la cadena.

3.3 Funciones Implícitas (Varias Variables) - Definición de funciones implícitas. - Aplicaciones de la regla de la derivada implícita.

3.4 Función Inversa - Definición y condiciones para la existencia de la función inversa. - Aplicación del teorema de la función inversa.

Capítulo 4: Extremos de Funciones e Integrales Múltiples

Este capítulo se enfoca en la determinación de extremos de funciones y en la evaluación de integrales múltiples. Los subtemas son:

4.1 Extremos de Funciones de Varias Variables - Máximos y mínimos locales. - Puntos críticos y condiciones para su existencia. - Método de multiplicadores de Lagrange.

4.2 Integrales Múltiples - Definición de integral doble y tipos de regiones generales. I - Cambio de variables en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas. - Aplicaciones en cálculo de volúmenes y centros de masa.

Capítulo 5: Integrales de Línea

Este capítulo introduce las integrales de línea y su relación con los campos vectoriales. Los subtemas son:

5.1 Caminos en \mathbb{R}^n - Definición de caminos y parametrización. - Ejemplos en el espacio tridimensional.

5.2 Campos Vectoriales - Definición y representación gráfica de campos vectoriales.

5.3 Integrales de Línea: Definición y Propiedades - Evaluación de integrales de línea. - Independencia del camino y funciones potenciales.

5.4 Teorema de Green - Enunciado y aplicaciones del teorema de Green.

Capítulo 6: Integrales de Superficie

Este capítulo estudia las integrales de superficie para funciones escalares y vectoriales. Los subtemas son:

6.1 Superficies Parametrizadas - Tipos principales de reparametrizaciones. - Áreas de superficies parametrizadas.

6.2 Integrales de Superficie de Funciones Reales - Evaluación de integrales de superficie.

6.3 La Divergencia de un Campo Vectorial - Definición y propiedades del operador de divergencia.

6.4 El Rotacional de un Campo Vectorial - Definición y aplicaciones físicas del rotacional.

6.5 Teorema de Stokes - Enunciado y aplicaciones del teorema.

Capítulo 7: Teorema de Stokes y Teorema de la Divergencia

En el último capítulo se profundiza en los teoremas fundamentales del análisis vectorial. Los subtemas son:

7.1 Teorema de Stokes - Relación entre integrales de línea y de superficie.

7.2 Teorema de la Divergencia - Relación entre el flujo de un campo vectorial y su divergencia.

7.3 Aplicaciones Físicas y Geométricas - Ejemplos en dinámica de fluidos y electromagnetismo.

A través de estos capítulos, el libro ofrece un desarrollo riguroso y detallado de los temas fundamentales del cálculo vectorial, con aplicaciones prácticas y ejercicios que permiten al lector consolidar los conocimientos adquiridos.

1. Introducción al Espacio Vectorial \mathbb{R}^n

1.1 El Espacio \mathbb{R}^n

1.1.1 Definición del Espacio Vectorial \mathbb{R}^n

El espacio \mathbb{R}^n es uno de los ejemplos más importantes y fundamentales en álgebra lineal y análisis matemático. Este espacio sirve como base para el estudio de estructuras más abstractas y para aplicaciones en diversas áreas como la física, la ingeniería y la economía.

Definition 1.1.1 El *espacio vectorial* \mathbb{R}^n es el conjunto de todas las n -tuplas ordenadas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Las operaciones de *suma de vectores* y *multiplicación por escalares* están definidas como sigue:

1. **Suma de vectores:** Para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, la suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ se define componente a componente:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

2. **Multiplicación por un escalar:** Para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, el producto $\alpha \mathbf{x}$ se define multiplicando cada componente por el escalar:

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

R El espacio \mathbb{R}^n cumple con los axiomas de un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales \mathbb{R} . Esto significa que \mathbb{R}^n es cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalares, y satisface propiedades como asociatividad, conmutatividad de la suma, existencia del elemento neutro y opuesto, entre otras.

Para comprender mejor la estructura de \mathbb{R}^n , es útil considerar algunos ejemplos y propiedades fundamentales.

■ **Example 1.1** Para $n = 2$, el espacio \mathbb{R}^2 representa el plano cartesiano. Un vector en \mathbb{R}^2 es una

2. Funciones de Varias Variables

2.1 Funciones de Varias Variables

2.1.1 Definición y Ejemplos de Funciones con Varias Entradas

Las funciones de varias variables son una extensión natural de las funciones de una variable y son fundamentales en el análisis matemático y en muchas aplicaciones en física, ingeniería y economía. En esta sección, definiremos formalmente las funciones de varias variables y proporcionaremos ejemplos para ilustrar sus propiedades y usos.

Definition 2.1.1 — Función de Varias Variables. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Una *función de n variables reales* es una aplicación $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ un número real $f(\mathbf{x})$.

R El dominio D es un subconjunto de \mathbb{R}^n , y la función f asigna a cada punto en D un valor en \mathbb{R} . Esto generaliza las funciones de una variable, donde $D \subseteq \mathbb{R}$.

■ **Example 2.1** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Demostración. Esta función asigna a cada punto (x, y) en el plano \mathbb{R}^2 el valor $x^2 + y^2$. Geométricamente, representa la distancia al cuadrado desde el origen hasta el punto (x, y) . ■

R La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ es un paraboloide elíptico, como se muestra en la Figura 2.1.1.

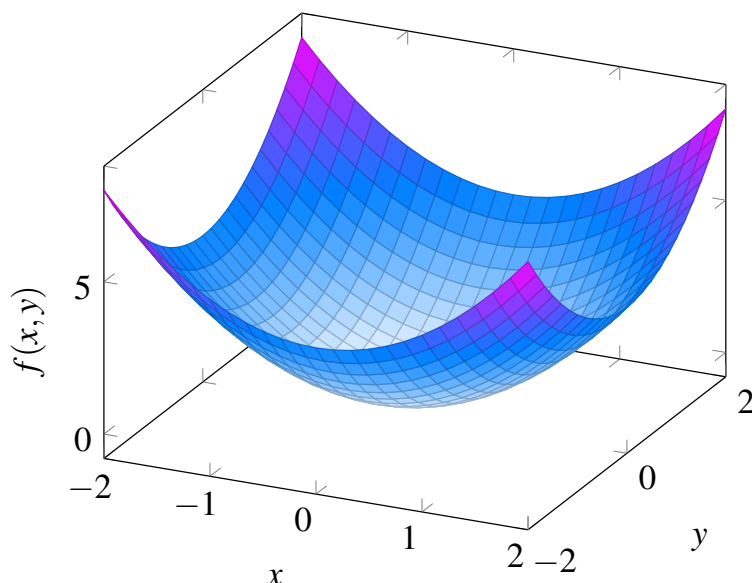


Figura 2.1.1: Gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$

Definition 2.1.2 — Función Escalar y Función Vectorial. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina *función escalar* de n variables. Si una función tiene la forma $\mathbf{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se denomina *función vectorial* de n variables.

■ **Example 2.2** Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

■

Demostración. Esta es una función vectorial que asigna a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un vector en \mathbb{R}^3 . ■

Definition 2.1.3 — Dominio y Contradominio. El *dominio* de una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es el conjunto D de todos los valores de entrada permitidos. El *contradominio* es \mathbb{R} , el conjunto de todos los posibles valores de salida.

■ **Example 2.3** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

■

Demostración. El dominio D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, es decir, el disco de radio 1 centrado en el origen. ■



La Figura 2.1.2 muestra el dominio de $f(x, y)$, que es el interior y la frontera del círculo unitario.

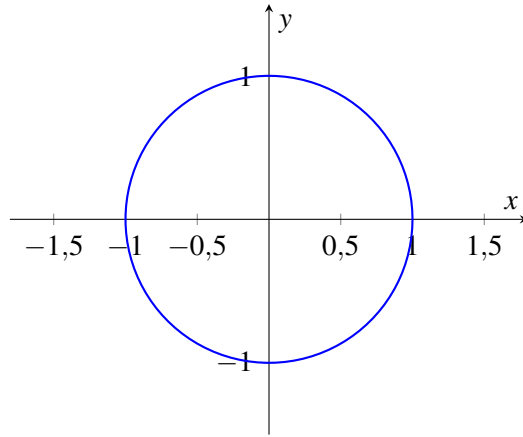


Figura 2.1.2: Dominio de $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Definition 2.1.4 — Funciones de Clase C^k . Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^k en D si todas sus derivadas parciales de orden hasta k existen y son continuas en D .

Theorem 2.1.1 — Continuidad de Funciones de Varias Variables. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La función f es continua en un punto $\mathbf{a} \in D$ si:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Demostración. Por definición, para que f sea continua en el punto $\mathbf{a} \in D$, debemos verificar que:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}).$$

Esto implica que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$ (con $\mathbf{x} \in D$), entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

Demostremos esto:

1. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Dado que la definición del límite establece la proximidad entre $f(\mathbf{x})$ y $f(\mathbf{a})$ cuando \mathbf{x} se acerca a \mathbf{a} , existe $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, entonces $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$.
2. Por la suposición de la existencia del límite, tal δ cumple con la condición mencionada.
3. Por lo tanto, siempre que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, el valor de $f(\mathbf{x})$ se encuentra arbitrariamente cerca de $f(\mathbf{a})$, cumpliendo la definición de continuidad.

Concluimos que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, lo cual establece la continuidad de f en \mathbf{a} . ■

■ **Example 2.4** Verifique si la función $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ es continua en el origen.

Demostración. Observamos que $f(0, 0)$ no está definida directamente, ya que el denominador es cero. Sin embargo, podemos definir $f(0, 0) = 0$ y analizar el límite:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0,$$

porque si tomamos cualquier camino hacia el origen, el numerador tiende a cero más rápido que el denominador. Por lo tanto, f es continua en el origen si definimos $f(0, 0) = 0$. ■

Exercise 2.1 Demuestre que la función $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ no es continua en el origen, incluso si se define $f(0, 0) = 0$. ■

Demostración. Tomemos el camino $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$

El límite a lo largo de este camino es $\frac{1}{2}$.

Ahora, tomemos el camino $y = 0$:

$$f(x, 0) = \frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0} = 0.$$

El límite a lo largo de este camino es 0. Dado que los límites dependen del camino, el límite no existe en el origen, y por lo tanto, f no es continua en $(0, 0)$. ■

Definition 2.1.5 — Funciones Homogéneas. Una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es *homogénea de grado k* si para todo $\lambda > 0$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}).$$

■ **Example 2.5** La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es homogénea de grado 2. ■

Demostración. Calculamos:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 f(x, y).$$

R Las funciones homogéneas son importantes en economía y física, ya que representan relaciones de escala y propiedades de autosemejanza.

Theorem 2.1.2 — Propiedad de Linealidad. Si f y g son funciones de varias variables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces la combinación lineal $\alpha f + \beta g$ es también una función de varias variables.

Demostración. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, funciones de varias variables, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Consideremos la función h definida como:

$$h(\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta g(\mathbf{x}),$$

para todo $\mathbf{x} \in D$.

Por definición, h es una función de varias variables si está bien definida y mapea elementos de D a \mathbb{R} . Dado que f y g son funciones de varias variables, sus valores están bien definidos para cada $\mathbf{x} \in D$. Además, las operaciones de suma y multiplicación escalar están definidas en \mathbb{R} . Por lo tanto, $h(\mathbf{x})$ está bien definida para cada $\mathbf{x} \in D$.

En consecuencia, la función $h = \alpha f + \beta g$ es una función de varias variables, como se quería demostrar. ■

Exercise 2.2 Sea $f(x, y) = e^x \cos y$ y $g(x, y) = e^x \sin y$. Demuestre que f y g satisfacen la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u.$$

Demostración. Calculamos las segundas derivadas parciales:

Para f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y = f.$$

Para g :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = e^x \sin y = g.$$

Por lo tanto, ambas funciones satisfacen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u$. ■

Definition 2.1.6 — Funciones Continuamente Diferenciables. Una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es *continuamente diferenciable* en D si todas sus derivadas parciales de primer orden existen y son continuas en D .

Theorem 2.1.3 — Teorema de Schwarz. Si f es una función de clase C^2 en una región D , entonces las derivadas parciales mixtas son iguales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \forall i, j.$$

Demostración. Por hipótesis, f es de clase C^2 en la región D , lo que significa que todas las derivadas parciales de primer y segundo orden existen y son continuas en D .

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$. Consideremos las derivadas parciales mixtas $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Por definición de la derivada parcial mixta, tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

La igualdad de las derivadas mixtas sigue del teorema de igualdad de las derivadas parciales bajo condiciones de continuidad (teorema de Clairaut). Esto asegura que si $f \in C^2$, el orden en que se toman las derivadas no afecta el resultado:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Por lo tanto, las derivadas parciales mixtas son iguales en cualquier punto $\mathbf{x} \in D$, lo que completa la demostración. ■

Exercise 2.3 Verifique el teorema de Schwarz para la función $f(x, y) = x^2y + xy^2$. ■

Demostración. Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + 2y.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x + 2y.$$

■

R La igualdad de las derivadas mixtas es una propiedad clave en el análisis multivariable y es esencial en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales.

Definition 2.1.7 — Función Implícita. Una función $f(x, y)$ está definida implícitamente por una ecuación de la forma $F(x, y, f(x, y)) = 0$, donde F es una función conocida.

■ **Example 2.6** La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ define implícitamente una función $z = f(x, y)$ en la región donde z es una función de x e y . ■

Demostración. Despejando z :

$$z = \pm \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

■

Exercise 2.4 Determine si la función definida implícitamente por $xy + \ln z = 0$ puede ser expresada como $z = f(x, y)$ y si es diferenciable. ■

Demostración. Despejamos z :

$$\ln z = -xy \implies z = e^{-xy}.$$

La función $z = e^{-xy}$ es diferenciable en todo \mathbb{R}^2 . ■

R Las funciones implícitas son comunes en matemáticas y física, y su diferenciabilidad está sujeta a ciertas condiciones que se estudian en el teorema de la función implícita.

En conclusión, las funciones de varias variables extienden el concepto de funciones de una variable y son fundamentales en el análisis matemático. Comprender sus propiedades y comportamientos es esencial para avanzar en el estudio del cálculo multivariable y sus aplicaciones.

3. Composición de Funciones de varias variables

3.1 Composición de Funciones de Varias Variables

3.1.1 Definición y Ejemplos de Composición

La composición de funciones es una operación fundamental en matemáticas que permite construir funciones más complejas a partir de funciones más simples. En el contexto de funciones de varias variables, la composición adquiere particular relevancia en el análisis y en aplicaciones donde las variables dependen unas de otras. En esta sección, exploraremos la definición, propiedades y aplicaciones de la composición de funciones de varias variables.

Definition 3.1.1 — Composición de Funciones de Varias Variables. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ dos funciones, donde $f(D) \subseteq E$. La *composición* de g con f es la función $h : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ definida por:

$$h(\mathbf{x}) = (g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})), \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in D.$$

R La composición $g \circ f$ está bien definida si y sólo si el rango de f está contenido en el dominio de g , es decir, $f(D) \subseteq E$.

La composición de funciones de varias variables es esencial en el estudio de transformaciones y en la aplicación de la regla de la cadena para derivadas parciales.

■ **Example 3.1** Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ y sea $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcule la composición $h = g \circ f$ y determine su expresión en términos de u y v . ■

Demostración. Primero, calculamos $f(u, v)$:

$$f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v).$$

Luego, aplicamos g a $f(u, v)$:

$$h(u, v) = g(f(u, v)) = (u \cos v)^2 + (u \sin v)^2 + v^2.$$

Simplificamos:

$$(u \cos v)^2 + (u \sin v)^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2.$$

Por lo tanto:

$$h(u, v) = u^2 + v^2.$$

■

Este ejemplo ilustra cómo la composición de funciones puede simplificar expresiones y facilitar el análisis de funciones más complejas.

Theorem 3.1.1 — Asociatividad de la Composición de Funciones. Sean $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ y $h : F \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ funciones tales que $f(D) \subseteq E$, $g(E) \subseteq F$. Entonces:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Demostración. Por definición de la composición de funciones, para cualquier $x \in D$ se tiene:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)).$$

Por definición de la composición $g \circ f$, esto se puede reescribir como:

$$h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Ahora consideremos la composición $(h \circ g) \circ f$. Por definición de la composición de funciones, se tiene:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)).$$

Por definición de la composición $h \circ g$, esto es igual a:

$$(h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Por lo tanto:

$$h((g \circ f)(x)) = (h \circ g)(f(x)).$$

Concluimos que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

■



Gracias a la asociatividad, podemos componer múltiples funciones sin preocuparnos por el orden de agrupación, lo que simplifica la notación y el análisis.

En el contexto de funciones de varias variables, la regla de la cadena juega un papel fundamental en el cálculo de derivadas.

Theorem 3.1.2 — Regla de la Cadena para Funciones de Varias Variables. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{a} \in D$ y sea $g : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en $f(\mathbf{a})$, con $f(D) \subseteq E$. Entonces, la función compuesta $h = g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en \mathbf{a} , y su matriz jacobiana está dada por:

$$J_h(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) \cdot J_f(\mathbf{a}),$$

donde J_f y J_g son las matrices jacobianas de f y g , respectivamente.

Demostración. Sea $h = g \circ f$, donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en $\mathbf{a} \in D$ y $g : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $f(\mathbf{a})$. Queremos demostrar que h es diferenciable en \mathbf{a} y que su matriz jacobiana es:

$$J_h(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) \cdot J_f(\mathbf{a}).$$

Por definición de diferenciabilidad, podemos escribir:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + J_f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathbf{r}_1(\mathbf{h}),$$

donde $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$.

Del mismo modo, para g en $f(\mathbf{a})$, tenemos:

$$g(f(\mathbf{a}) + \mathbf{k}) = g(f(\mathbf{a})) + J_g(f(\mathbf{a}))\mathbf{k} + \mathbf{r}_2(\mathbf{k}),$$

donde $\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_2(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|} = 0$.

Sustituyendo $\mathbf{k} = J_f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathbf{r}_1(\mathbf{h})$, obtenemos:

$$g(f(\mathbf{a} + \mathbf{h})) = g(f(\mathbf{a}) + J_f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathbf{r}_1(\mathbf{h})).$$

Aplicando la linealidad de $J_g(f(\mathbf{a}))$, esto se convierte en:

$$g(f(\mathbf{a} + \mathbf{h})) = g(f(\mathbf{a})) + J_g(f(\mathbf{a}))J_f(\mathbf{a})\mathbf{h} + J_g(f(\mathbf{a}))\mathbf{r}_1(\mathbf{h}) + \mathbf{r}_2(\mathbf{k}).$$

Definiendo el término de error total como $\mathbf{r}(\mathbf{h}) = J_g(f(\mathbf{a}))\mathbf{r}_1(\mathbf{h}) + \mathbf{r}_2(\mathbf{k})$, se tiene que:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Por lo tanto, h es diferenciable en \mathbf{a} y su matriz jacobiana es:

$$J_h(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) \cdot J_f(\mathbf{a}).$$

■

■ **Example 3.2** Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^{xy}, \ln(x + y))$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(u, v) = u^2 + v^2$. Calcule la matriz jacobiana de $h = g \circ f$ en el punto $(1, 0)$. ■

Demostración. Primero, calculamos $f(1,0)$:

$$f(1,0) = (e^{1 \cdot 0}, \ln(1+0)) = (e^0, \ln 1) = (1,0).$$

Calculamos las matrices jacobianas:

La matriz jacobiana de f es:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ \frac{1}{x+y} & \frac{1}{x+y} \end{pmatrix}.$$

Evaluamos en $(1,0)$:

$$J_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \cdot e^0 & 1 \cdot e^0 \\ \frac{1}{1+0} & \frac{1}{1+0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana de g es:

$$J_g(u,v) = (2u \quad 2v).$$

Evaluamos en $f(1,0) = (1,0)$:

$$J_g(1,0) = (2 \cdot 1 \quad 2 \cdot 0) = (2 \quad 0).$$

Entonces, la matriz jacobiana de h en $(1,0)$ es:

$$\begin{aligned} J_h(1,0) &= J_g(f(1,0)) \cdot J_f(1,0) = (2 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= ((2)(0) + (0)(1) \quad (2)(1) + (0)(1)) = (0 \quad 2). \end{aligned}$$

■

Exercise 3.1 Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (xy, yz)$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(u,v) = u^2 + v^2$. Calcule la matriz jacobiana de $h = g \circ f$ en el punto $(1,1,1)$. ■

Demostración. Primero, calculamos $f(1,1,1) = (1 \cdot 1, 1 \cdot 1) = (1,1)$.

La matriz jacobiana de f es:

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}.$$

Evaluamos en $(1,1,1)$:

$$J_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz jacobiana de g es:

$$J_g(u,v) = (2u \quad 2v).$$

Evaluamos en $f(1, 1, 1) = (1, 1)$:

$$J_g(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz jacobiana de h en $(1, 1, 1)$ es:

$$\begin{aligned} J_h(1, 1, 1) &= J_g(f(1, 1, 1)) \cdot J_f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= ((2)(1) + (2)(0) \quad (2)(1) + (2)(1) \quad (2)(0) + (2)(1)) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

R La regla de la cadena para funciones de varias variables es esencial en el cálculo diferencial multivariable y en la resolución de problemas de optimización y modelado matemático.

También es importante considerar la diferenciabilidad de la función compuesta en términos de sus componentes.

Theorem 3.1.3 — Diferenciabilidad de la Composición. Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua en \mathbf{a} y diferenciable en un entorno de \mathbf{a} , y sea $g : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ continua en $f(\mathbf{a})$ y diferenciable en un entorno de $f(\mathbf{a})$. Entonces, la composición $h = g \circ f$ es diferenciable en \mathbf{a} .

Demostración. Sea $h = g \circ f$, donde $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en \mathbf{a} y diferenciable en un entorno de \mathbf{a} , y $g : E \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ es continua en $f(\mathbf{a})$ y diferenciable en un entorno de $f(\mathbf{a})$. Por definición de diferenciabilidad, existe una matriz jacobiana $J_f(\mathbf{a})$ tal que:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + J_f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathbf{r}_f(\mathbf{h}),$$

donde $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_f(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$.

Del mismo modo, para g existe una matriz jacobiana $J_g(f(\mathbf{a}))$ tal que:

$$g(f(\mathbf{a}) + \mathbf{k}) = g(f(\mathbf{a})) + J_g(f(\mathbf{a}))\mathbf{k} + \mathbf{r}_g(\mathbf{k}),$$

donde $\lim_{\mathbf{k} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_g(\mathbf{k})}{\|\mathbf{k}\|} = 0$.

Sustituyendo $\mathbf{k} = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = J_f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathbf{r}_f(\mathbf{h})$, obtenemos:

$$g(f(\mathbf{a} + \mathbf{h})) = g(f(\mathbf{a}) + J_f(\mathbf{a})\mathbf{h} + \mathbf{r}_f(\mathbf{h})).$$

Aplicando la linealidad de $J_g(f(\mathbf{a}))$, esto se convierte en:

$$g(f(\mathbf{a} + \mathbf{h})) = g(f(\mathbf{a})) + J_g(f(\mathbf{a}))J_f(\mathbf{a})\mathbf{h} + J_g(f(\mathbf{a}))\mathbf{r}_f(\mathbf{h}) + \mathbf{r}_g(\mathbf{k}).$$

Definiendo el término de error total como $\mathbf{r}_h(\mathbf{h}) = J_g(f(\mathbf{a}))\mathbf{r}_f(\mathbf{h}) + \mathbf{r}_g(\mathbf{k})$, se tiene que:

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}_h(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

Por lo tanto, h es diferenciable en \mathbf{a} .

■



Extremos de Funciones e Integrales Múltiples

4	Extremos de Funciones de Varias Variables	245
4.1	Definición	
4.2	Condiciones Suficientes para la Existencia de Extremos Locales	
4.3	Caso de Dos Variables	
4.4	Extremos Condicionados: Método de Multiplicadores de Lagrange	
4.5	Extremos Absolutos sobre Regiones Compactas	
4.6	Ejercicios resueltos	
4.7	Ejercicios propuestos	
5	Integrales Múltiples	317
5.1	Integral Doble: Integralidad, Tipos de Regiones Generales	
5.2	Cambio de Variables en Integrales Dobles: Coordenadas Polares	
5.3	Aplicaciones de la Integral Doble	
5.4	Integrales Triples: Posibles Órdenes de Integración	
5.5	Cambio de Variables en Integrales Triples	
5.6	Aplicaciones de las Integrales Triples	
5.7	Ejercicios Resueltos	
5.8	Ejercicios Propuestos	

método de multiplicadores de Lagrange. ■

Exercise 4.122 Considere $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$ y la región compacta $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Encuentre los extremos absolutos de f en D y demuestre rigurosamente que estos son los únicos puntos donde f alcanza sus extremos. ■

Exercise 4.123 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y D el tetraedro definido por los vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, y $(0, 0, 1)$. Encuentre y demuestre los extremos absolutos de $f(x, y, z) = x + y + z$ en D . ■

Exercise 4.124 Demuestre que si $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y estrictamente convexa en una región compacta D , entonces el máximo absoluto de f se alcanza en un punto de la frontera de D . ■

Exercise 4.125 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ y D el cuadrado cerrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Demuestre que f alcanza su máximo absoluto en D y que este ocurre en el punto $(0, 0)$. ■

Exercise 4.126 Sea $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ definida en la región compacta $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Encuentre y demuestre los puntos donde f alcanza sus extremos absolutos en D . ■

Exercise 4.127 Demuestre que si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en una región compacta D y alcanza un máximo en un punto de la frontera de D , entonces para cualquier extensión de f fuera de D , el máximo global de f no puede ocurrir en el interior de D . ■

Exercise 4.128 Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable definida en el cuadrado $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Use el Teorema de los multiplicadores de Lagrange para demostrar que los extremos absolutos de f en D deben satisfacer una condición de tipo borde-interior. ■

Exercise 4.129 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ una región compacta no convexa. Demuestre que f aún alcanza su máximo y mínimo absolutos en D a pesar de la falta de convexidad de D . ■

5. Integrales Múltiples

5.1 Integral Doble: Integralidad, Tipos de Regiones Generales

5.1.1 Definición de la Integral Doble

La integral doble es una extensión natural del concepto de integral definida en una variable al caso de funciones de dos variables sobre regiones del plano. Este concepto es fundamental en el análisis matemático y tiene aplicaciones en diversas áreas como la física, la ingeniería y la economía.

Definition 5.1.1 Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada definida en una región acotada $D \subset \mathbb{R}^2$. Una **partición** \mathcal{P} de D es un conjunto finito de subregiones D_{ij} tales que:

1. Cada D_{ij} es un rectángulo cerrado $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.
2. $D = \bigcup_{i,j} D_{ij}$.
3. Las intersecciones $D_{ij} \cap D_{kl}$, con $(i, j) \neq (k, l)$, tienen medida cero.

Definition 5.1.2 Sea \mathcal{P} una partición de D y seleccionemos un punto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en cada subrectángulo D_{ij} . La **suma de Riemann doble** asociada a f y \mathcal{P} es:

$$S(\mathcal{P}, f) = \sum_{i,j} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x_i \Delta y_j,$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

La idea es aproximar el valor de la integral doble mediante la suma de los volúmenes de prismas rectangulares cuya base es cada subrectángulo D_{ij} y cuya altura es el valor de la función en el punto seleccionado.

Definition 5.1.3 Se define la **norma** de la partición \mathcal{P} como el máximo de las diagonales de los subrectángulos:

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{i,j} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}.$$

Definition 5.1.4 La función f es **integrable** en D si existe un número I tal que, para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para toda partición \mathcal{P} con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y cualquier elección de puntos (x_{ij}^*, y_{ij}^*) en D_{ij} , se cumple:

$$|S(\mathcal{P}, f) - I| < \varepsilon.$$

Este número I se denomina la **integral doble** de f sobre D , y se denota por:

$$I = \iint_D f(x, y) dA.$$

Theorem 5.1.1 — Criterio de Integrabilidad. Si f es una función continua en una región cerrada y acotada $D \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es integrable en D .

Demostración. Dado que f es una función continua en D y D es una región cerrada y acotada, por el **Teorema de Heine-Borel**, D es compacto. La continuidad de f implica que f es uniformemente continua en D .

Por definición de integrabilidad, para una función f continua en una región compacta D , se puede aproximar f de manera uniforme por funciones simples (por ejemplo, particiones de D en subregiones más pequeñas con valores de f evaluados en puntos específicos). Esto asegura que la suma de Riemann converge a la integral de f en D .

Por lo tanto, f es integrable en D . ■

Este teorema nos proporciona una condición suficiente para la integrabilidad de una función sobre una región. Sin embargo, existen funciones discontinuas que también son integrables bajo ciertas condiciones.

■ **Example 5.1** Calcule la integral doble de $f(x, y) = x + y$ sobre el rectángulo $D = [0, 1] \times [0, 2]$. ■

Demostración. Como f es continua en D , es integrable. La integral doble se calcula como:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx.$$

Calculamos la integral interna:

$$\int_0^2 (x + y) dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=2} = x(2) + \frac{1}{2}(2)^2 - 0 = 2x + 2.$$

Ahora, integramos respecto a x :

$$\int_0^1 (2x + 2) dx = x^2 + 2x \Big|_{x=0}^{x=1} = (1 + 2) - 0 = 3.$$

Por lo tanto, la integral doble es 3. ■



El orden de integración puede intercambiarse si la función y la región lo permiten, lo que a veces simplifica el cálculo de la integral doble.

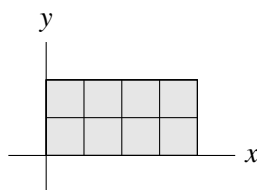


Figura 5.1.1: Partición del rectángulo D en subrectángulos.

Exercise 5.1 Calcule la integral doble de $f(x, y) = e^{x+y}$ sobre el rectángulo $D = [0, \ln 2] \times [0, \ln 3]$. ■

Este ejercicio permite practicar el cálculo de integrales dobles con funciones exponenciales.

Lema 5.1.1 Si f es acotada en D y el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida cero, entonces f es integrable en D .

Demostración. Este resultado se deriva del teorema de Lebesgue sobre la integrabilidad de funciones acotadas con discontinuidades en conjuntos de medida cero. Dado que las discontinuidades no afectan significativamente las sumas de Riemann, la integral existe. ■

■ **Example 5.2** Sea $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ e } y \text{ son racionales,} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$ Calcule la integral doble de f sobre $D = [0, 1] \times [0, 1]$. ■

Demostración. El conjunto de puntos donde $f = 1$ es numerable dentro de D , por lo que tiene medida cero. Por lo tanto, f es integrable y:

$$\iint_D f(x, y) dA = 0.$$

Este ejemplo muestra que funciones altamente discontinuas pueden ser integrables si sus puntos de discontinuidad están suficientemente "dispersos".

Theorem 5.1.2 — Linealidad de la Integral Doble. Si f y g son integrables en D , y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \iint_D f dA + \beta \iint_D g dA.$$

Demostración. Por definición de la integral doble, consideremos la suma de Riemann de $\alpha f + \beta g$ sobre una partición P de D :

$$\sum_{i=1}^n (\alpha f(x_i, y_i) + \beta g(x_i, y_i)) \Delta A_i.$$

Aplicando la propiedad distributiva, obtenemos:

$$\alpha \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i + \beta \sum_{i=1}^n g(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

Tomando el límite cuando el tamaño de la partición tiende a cero, obtenemos:

$$\iint_D (\alpha f + \beta g) dA = \alpha \iint_D f dA + \beta \iint_D g dA.$$

Esto concluye la demostración. ■

Corollary 5.1.3 Si f es integrable en D y c es una constante, entonces:

$$\iint_D cf(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA.$$

Demostración. Este corolario es un caso particular del **Teorema de Linealidad de la Integral Doble**. Si tomamos $g(x, y) = 0$ y $\beta = 0$ en el teorema, obtenemos:

$$\iint_D (\alpha f + 0 \cdot g) dA = \alpha \iint_D f dA + 0 \cdot \iint_D g dA.$$

Simplificando, se tiene:

$$\iint_D \alpha f dA = \alpha \iint_D f dA.$$

Sustituyendo $\alpha = c$, se concluye que:

$$\iint_D cf(x, y) dA = c \iint_D f(x, y) dA.$$

Esto concluye la demostración. ■

Este corolario es un caso particular del teorema de linealidad y es útil en el cálculo de integrales dobles.

Exercise 5.2 Verifique la linealidad de la integral doble para las funciones $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = y$ en el rectángulo $D = [0, 1] \times [0, 1]$. ■

R La integral doble puede interpretarse geométricamente como el volumen bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región D en el plano xy .

Exercise 5.3 Encuentre el volumen del sólido limitado por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$ sobre el círculo D definido por $x^2 + y^2 \leq 1$. ■

Este ejercicio introduce el uso de coordenadas polares para calcular integrales dobles en regiones circulares.

R La elección del sistema de coordenadas adecuado puede simplificar significativamente el cálculo de integrales dobles en ciertas regiones.

En las siguientes secciones, exploraremos técnicas avanzadas para calcular integrales dobles y analizaremos diferentes tipos de regiones sobre las cuales integrar.



Integrales de Línea y de Superficie

6	Integrales de Línea	427
6.1	Camino en \mathbb{R}^n	
6.2	Campos Vectoriales	
6.3	Integrales de Línea: Definición y Propiedades	
6.4	Independencia del Camino, Campos Conservativos y Funciones Potenciales	
6.5	Integrales de Línea con Respecto a la Longitud de Arco	
6.6	Teorema de Green	
6.7	Ejercicios Resueltos	
6.8	Ejercicios Propuestos	
7	Integrales de Superficie	501
7.1	Superficie Parametrizada: Tipos Principales de Re-parametrizaciones	
7.2	Áreas de Superficies Parametrizadas	
7.3	Integral de Superficie de Funciones Reales	
7.4	Integrales de Superficies de Campos Vectoriales	
7.5	La Divergencia de un Campo Vectorial	
7.6	El Rotacional de un Campo Vectorial	
7.7	Teorema de Stokes	
7.8	Ejercicios Resueltos	
7.9	Ejercicios Propuestos	

6. Integrales de Línea

6.1 Caminos en \mathbb{R}^n

6.1.1 Definición de un Camino y Parametrización

En el estudio del cálculo en varias variables, los caminos juegan un papel fundamental al permitir la definición de integrales de línea y el análisis del comportamiento de campos vectoriales a lo largo de trayectorias en \mathbb{R}^n . A continuación, introduciremos formalmente la noción de camino y discutiremos su parametrización.

Definition 6.1.1 Un **camino** en \mathbb{R}^n es una función continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cerrado. La función γ asigna a cada $t \in [a, b]$ un punto $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ en \mathbb{R}^n . El intervalo $[a, b]$ se denomina **intervalo de parametrización**.

Esta definición formaliza la idea intuitiva de una trayectoria continua en el espacio \mathbb{R}^n . La continuidad de γ asegura que el camino no presenta saltos o discontinuidades.

R La parametrización de un camino no es única. Un mismo camino puede ser recorrido a diferentes velocidades o direcciones, dependiendo de cómo se parametrize. Sin embargo, el conjunto de puntos trazado por γ es el mismo independientemente de la parametrización.

■ **Example 6.1** Considere el camino $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Este camino describe la circunferencia unitaria en el plano xy , comenzando en el punto $(1, 0)$ y recorriéndola una vez en sentido antihorario. ■

En la Figura 6.1.1, se ilustra el camino descrito en el ejemplo anterior.

Exercise 6.1 Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Determine el punto inicial y final del camino, y describa geoméricamente la trayectoria en \mathbb{R}^3 . ■

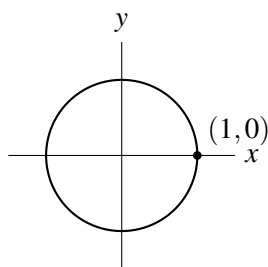


Figura 6.1.1: Camino $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ en el plano xy .

Demostración. El punto inicial es $\gamma(0) = (0,0,0)$ y el punto final es $\gamma(1) = (1,1,1)$. Geométricamente, el camino describe una curva que inicia en el origen y termina en el punto $(1,1,1)$, siguiendo la trayectoria dada por las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$. ■

Definition 6.1.2 Un camino $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice **suave** si sus componentes $\gamma_i(t)$ son derivables y sus derivadas son continuas en $[a,b]$.

La suavidad de un camino garantiza que no presenta puntos angulosos o cambios abruptos de dirección, lo cual es importante en el análisis de integrales de línea y campos vectoriales.

Theorem 6.1.1 Sea $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino suave. Entonces, γ es diferenciable en (a,b) y su derivada $\gamma'(t)$ es continua en $[a,b]$.

Demostración. Por definición, un camino suave $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función cuya derivada $\gamma'(t)$ existe y es continua en $[a,b]$.

Por el Teorema Fundamental del Cálculo para funciones vectoriales, si $\gamma'(t)$ es continua en $[a,b]$, entonces γ es diferenciable en todo (a,b) , y su derivada es precisamente $\gamma'(t)$.

Por lo tanto, γ es diferenciable en (a,b) y $\gamma'(t)$ es continua en $[a,b]$. ■

■ **Example 6.2** Considere el camino $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por:

$$\gamma(t) = (t, t^2).$$

Este camino es suave, ya que las funciones t y t^2 son derivables y sus derivadas 1 y $2t$ son continuas en $[0,1]$. ■

Este camino describe una parábola en el plano xy , desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(1,1)$.

Exercise 6.2 Verifique si el camino $\gamma: [0,2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\gamma(t) = (\cos t, |\sin t|)$ es suave en $[0,2\pi]$. ■

Demostración. La función $|\sin t|$ no es diferenciable en los puntos donde $\sin t = 0$, es decir, en $t = 0, \pi$, y 2π . Por lo tanto, γ no es suave en $[0,2\pi]$. ■

Definition 6.1.3 Dos caminos $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\gamma_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dicen **equivalentes** si existe una función biyectiva y monótona $\phi: [a,b] \rightarrow [c,d]$ tal que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \phi$.

Esta definición establece que dos caminos son equivalentes si recorren la misma trayectoria, posiblemente a velocidades diferentes o en diferentes intervalos de parametrización.

Theorem 6.1.2 La relación de equivalencia entre caminos es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los caminos en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ el conjunto de todos los caminos en \mathbb{R}^n . La relación de equivalencia entre caminos se define de tal manera que dos caminos γ_1 y γ_2 son equivalentes si $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in [a, b]$.

Verifiquemos las propiedades de una relación de equivalencia:

- **Reflexividad:** Para cualquier camino γ , se tiene $\gamma(t) = \gamma(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Por lo tanto, γ es equivalente a sí mismo.
- **Simetría:** Si γ_1 es equivalente a γ_2 , entonces $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Por lo tanto, $\gamma_2(t) = \gamma_1(t)$, y γ_2 es equivalente a γ_1 .
- **Transitividad:** Si γ_1 es equivalente a γ_2 y γ_2 es equivalente a γ_3 , entonces $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ y $\gamma_2(t) = \gamma_3(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Por lo tanto, $\gamma_1(t) = \gamma_3(t)$, y γ_1 es equivalente a γ_3 .

Por lo tanto, la relación de equivalencia entre caminos es una relación de equivalencia. ■

Corollary 6.1.3 La integral de línea de una función escalar continua sobre un camino depende únicamente de la clase de equivalencia del camino.



Este resultado es fundamental en el cálculo de integrales de línea, ya que permite cambiar la parametrización de un camino sin alterar el valor de la integral.

■ **Example 6.3** Considere el camino $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $\gamma(t) = (t, t)$ y el camino $\tilde{\gamma}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\tilde{\gamma}(s) = (s/2, s/2)$. Estos caminos son equivalentes, ya que recorren la misma trayectoria en el plano xy , la recta $y = x$, aunque con diferente parametrización. ■

Exercise 6.3 Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un camino suave tal que $\gamma(0) = \gamma(1)$. Se define el **camino cerrado** Γ como la imagen de γ . Demuestre que la longitud de Γ es igual a la integral de la norma de la derivada de γ en $[0, 1]$. ■

Demostración. La longitud L del camino Γ es:

$$L = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Dado que γ es suave y $\gamma(0) = \gamma(1)$, el camino es cerrado y su longitud se calcula mediante la integral de la norma de su derivada. ■

■ **Definition 6.1.4** Un camino $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **regular** si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

La regularidad de un camino implica que no se detiene en ningún punto del intervalo de parametrización, lo cual es importante en el estudio de la curvatura y torsión de curvas.

■ **Example 6.4** El camino $\gamma(t) = (t^3, t^3)$ en $[0, 1]$ es suave, pero no es regular en $t = 0$, ya que $\gamma'(0) = (0, 0)$. ■

Exercise 6.4 Determine si el camino $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ en $[0, 1]$ es regular. ■

Demostración. Calculamos la derivada:

$$\gamma'(t) = (1, 2t, 3t^2).$$

7. Integrales de Superficie

7.1 Superficie Parametrizada: Tipos Principales de Reparametrizaciones

7.1.1 Definición de Superficies Parametrizadas

Las superficies parametrizadas son representaciones fundamentales en el análisis de varias variables, permitiendo describir geometrías complejas mediante funciones de parámetros. Una parametrización adecuada facilita el cálculo de integrales de superficie, análisis de propiedades geométricas y la aplicación de teoremas fundamentales en cálculo vectorial. En esta sección, se presentan definiciones formales, propiedades clave, ejemplos ilustrativos y ejercicios que profundizan en la comprensión y manipulación de superficies parametrizadas.

Definition 7.1.1 Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio abierto y $\mathbf{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase \mathcal{C}^1 . La **superficie parametrizada** Σ está definida por:

$$\Sigma = \mathbf{r}(U) = \{\mathbf{r}(u, v) \mid (u, v) \in U\}$$

donde $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ son funciones diferenciables que asignan a cada punto $(u, v) \in U$ un punto en el espacio tridimensional.

R La parametrización de una superficie permite estudiar sus propiedades geométricas y topológicas mediante el análisis de las funciones $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$. Elegir una parametrización conveniente puede simplificar significativamente el cálculo de integrales de superficie y la aplicación de teoremas como el Teorema de Stokes y el Teorema de la Divergencia.

Para comprender mejor las superficies parametrizadas, es importante explorar los tipos principales de reparametrizaciones y cómo estas afectan la representación de la superficie.

Theorem 7.1.1 — Teorema de Reparametrización. Sea Σ una superficie parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$ y $\phi : V \rightarrow U$ una función biyectiva de clase \mathcal{C}^1 entre dominios abiertos $V \subseteq \mathbb{R}^2$ y $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Entonces, la superficie Σ también puede ser parametrizada por:

$$\tilde{\mathbf{r}}(s, t) = \mathbf{r}(\phi(s, t)) = \mathbf{r}(u(s, t), v(s, t)).$$

Demostración. Dado que $\phi : V \rightarrow U$ es una función biyectiva de clase \mathcal{C}^1 , existen funciones $u(s, t)$ y $v(s, t)$ tales que $\phi(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$ y ϕ tiene derivadas parciales continuas en V .

La superficie Σ está originalmente parametrizada por $\mathbf{r}(u, v)$ con $(u, v) \in U$. Al introducir la función ϕ , podemos definir una nueva parametrización $\tilde{\mathbf{r}}(s, t)$ en V como:

$$\tilde{\mathbf{r}}(s, t) = \mathbf{r}(\phi(s, t)) = \mathbf{r}(u(s, t), v(s, t)).$$

1. Diferenciabilidad: Dado que \mathbf{r} y ϕ son de clase \mathcal{C}^1 , la composición $\tilde{\mathbf{r}}(s, t) = \mathbf{r}(\phi(s, t))$ también es de clase \mathcal{C}^1 , por la regla de la cadena.

2. Imagen de la parametrización: La imagen de $\tilde{\mathbf{r}}(s, t)$ en V es la misma que la imagen de $\mathbf{r}(u, v)$ en U , ya que ϕ es una función biyectiva entre V y U .

Por lo tanto, Σ también puede ser descrita mediante la parametrización $\tilde{\mathbf{r}}(s, t)$ en términos de las nuevas coordenadas (s, t) . ■

Este teorema garantiza que cualquier reparametrización suave de una superficie parametrizada mantiene la integridad de la representación de la superficie, permitiendo flexibilidad en la elección de coordenadas y métodos de cálculo.

Corollary 7.1.2 Si $\mathbf{r}(u, v)$ es una parametrización regular de una superficie Σ , entonces cualquier reparametrización $\tilde{\mathbf{r}}(s, t)$ de Σ también es regular.

Demostración. La regularidad de \mathbf{r} implica que el determinante del Jacobiano $J_{\mathbf{r}} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \neq 0$. Dado que ϕ es de clase \mathcal{C}^1 y biyectiva, el Jacobiano de $\tilde{\mathbf{r}}$ también será no nulo, asegurando la regularidad de la reparametrización. ■

■ **Example 7.1** Considérese la superficie esférica de radio R centrada en el origen. Una parametrización común es:

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi)$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.

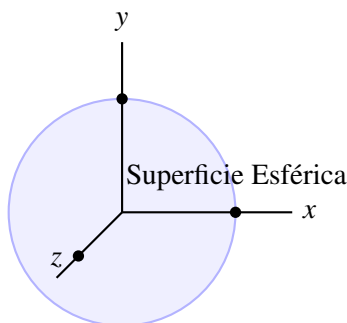


Figura 7.1.1: Parametrización de la superficie esférica de radio $R = 1$.

La Figura 7.1.1 muestra la superficie esférica parametrizada. Cada punto en la superficie se corresponde con un par de ángulos (θ, ϕ) , representando coordenadas esféricas. ■

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Helbert Justo Luque Zevallos

AÑO 2024

Primera Edición

1 Serie: Licenciatura en matemáticas

- Matemática Básica
- Razonamiento Lógico Matemático
- Análisis Matemático I
- Álgebra
- Estadística y Probabilidad
- Análisis Matemático II
- Álgebra Lineal I
- Inferencia Estadística
- Análisis Real I
- Análisis Numérico
- Álgebra Lineal II
- Estructuras Algebraicas
- Topología
- Análisis Real II
- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
- Optimización Lineal
- Ecuaciones Diferenciales Parciales
- Introducción a la Geometría Hiperbólica
- Teoría de Galois
- Numéricos para la Solución de Ecuaciones Diferenciales
- Medida e Integración
- Optimización No Lineal
- Teoría Cualitativa
- Análisis Funcional
- Geometría Diferencial I
- Introducción a la Topología Algebraica
- Variedades Diferenciables
- Introducción a los Métodos Variacionales para Ecuaciones Diferenciales
- Introducción a la Topología Diferencial
- Superficies Mínimas I
- Geometría Diferencial II
- Introducción al Método de Elementos Finitos
- Introducción a la Geometría de Formas Diferenciales